Arithmétique

Définition Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on dit que n divise m, ce que l'on note $n \mid m$, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = kn$.
On dit que $p \in \mathbb{N}$ est premier si $p \neq 1$ et si les seuls diviseurs de p sont 1 et lui-même.

Exercice 1 Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$. Montrer que si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$.

Exercice 2 Soit $n \geq 2$ un entier non premier. Montrer que n admet un diviseur d tel que $d \leq \sqrt{n}$.

Exercice 3 Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $3^{n-1} + 5^{n-1}$ divise $3^n + 5^n$.

Exercice 4 ★ Soit $n \geq 2$, dont on note $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_\ell = n$ les diviseurs. On considère $m = d_1 d_2 + \cdots + d_{\ell-1} d_\ell$. Montrer que $m < n^2$, puis déterminer pour quels n est-ce que $m \mid n^2$. **Indication** : *Utiliser* $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

Théorème Tout entier $n \geq 2$ se décompose, de manière unique, comme produit de facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_\ell^{\alpha_\ell}$.

Exercice 5 Soit p un nombre premier. Montrer que $\sqrt{p}$ est irrationnel. En général, pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ est-ce que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$?

Relation de divisibilité

Propriété Soient $n, m \geq 1$ deux entiers. On note $p_1, \ldots, p_\ell$ l'ensemble des nombres premiers divisant n ou m. On écrit

$$n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_\ell^{\alpha_\ell} \quad \text{et} \quad m = p_1^{\beta_1} \ldots p_\ell^{\beta_\ell}, \quad \text{où} \quad \alpha_i, \beta_i \geq 0.$$

Alors $n \mid m$ si et seulement si ...

Exercice 6 Avec les notations précédentes, comment se factorisent $\mathrm{pgcd}(n, m)$ et $\mathrm{ppcm}(n, m)$? Que dire de leur produit ?

Exercice 7 Soit $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_\ell^{\alpha_\ell}$.

1. Quel est le nombre $d(n)$ de diviseurs de n ?
2. Discuter de la parité de $d(n)$.

Exercice 8 Que vaut le produit de tous les diviseurs de n ?

Exercice 9 Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $a \mid b^2$, $b^2 \mid a^3$, $a^3 \mid b^4$, etc. Autrement dit, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a^{2k-1} \mid b^{2k}$ et $b^{2k} \mid a^{2k+1}$. Mq $a = b$.

Divisibilité et additivité

Propriété Si $n \mid a$ et $n \mid b$, alors $n \mid a + b$, $n \mid a - b$, et $n \mid ac$, pour tout $c \in \mathbb{N}$.

Définition On dit que n et m sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1.

Exercice 10 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n et $2n + 1$ sont premiers entre eux. Que dire de $\mathrm{pgcd}(n, n + 2)$?

Exercice 11 Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice 12 Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n^2 + 1 \mid n^3 + 3$.

Exercice 13

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k - 1$.
   Ind : *Le produit de deux entiers de la forme* $4k + 1$ *est également de la forme* $4k + 1$.

Exercice 14 On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Factoriser $F_n - 2$ et en déduire que F_n et F_{n-1} sont premiers entre eux.
2. Montrer que tous les F_k sont deux à deux premiers entre eux, et en déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 15 Pour $n \geq 1$, on définit $a_n = 100 + n^2$ et $d_n = \mathrm{pgcd}(a_n, a_{n+1})$. Montrer que la suite (d_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Exercice 16 Soit $A = \{2^n 3^{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer qu'aucune somme d'éléments distincts de A n'est une puissance parfaite (c'est-à-dire s'écrive comme m^α, pour $\alpha \geq 2$).

Algèbre

Exercice 17

1. Factoriser le polynôme $x^3 - 1$, par $x - 1$. Puis factoriser $x^3 - y^3$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, factoriser $x^n - 1$ et en déduire une factorisation de $x^n - y^n$.
3. En déduire, pour n impair, une factorisation de $x^n + 1$.

Exercice 18

1. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
2. ★ Montrer que si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.

Exercice 19 Déterminer les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 1$.
Indication : *Commencer par multiplier par deux.*

Exercice 20 ★ Montrer que $a^4 + 4$ n'est pas premier. **Indication** : *Chercher à factoriser cette expression, en complétant un carré.*

Équations diophantiennes

Factorisation

Propriété Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Si a et b sont premiers entre eux et si ab est une puissance α-ième, alors a et b sont eux-mêmes des puissances α-ièmes.

Exercice 21 Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n(n+2) = 2^k$.

Exercice 22

1. On considère l'équation $3^m - 2^n = 1$, d'inconnues $n, m \in \mathbb{N}$.
   - **a)** Montrer si (n, m) est solution, et $n \geq 2$, alors m est pair.
   - **b)** Trouver toutes les solutions.
2. On considère l'équation $2^n - 3^m = 1$, d'inconnues $n, m \in \mathbb{N}$.
   - **a)** Déterminer les solutions pour lesquelles m est impair.
   - **b)** En travaillant modulo 4, déterminer toutes les solutions.

Exercice 23 On cherche à écrire un entier $N \geqslant 1$ comme une somme d'au moins deux entiers strictement positifs consécutifs.

1. Montrer qu'une écriture $N = a + (a+1) + \cdots + (a+k-1)$ équivaut à $2N = k(2a+k-1)$.
2. Montrer que le nombre de telles écritures est égal au nombre de diviseurs positifs impairs de N, diminué de 1.
3. Quels sont les entiers qui ne possèdent aucune telle écriture ?

Exercice 24 Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $n2^n + 1$ est le carré d'un entier.

Inégalités

Exercice 25 Déterminer les triplets $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $x + y + z = xyz$.

Exercice 26 Déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que

1. $x^2 + x + 1 = y^2$.
2. $(x+1)^4 - (x-1)^4 = y^3$.

Exercice 27 Déterminer les triplets $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{3}{5}$.

Exercice 28 Déterminer les triplets $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right)\left(1 + \dfrac{1}{z}\right) = 2$.

Exercice 29 Déterminer les couples $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $x^y = y^x$. **Ind** : *Poser* $d = \operatorname{pgcd}(x, y)$.

Exercice 30 Déterminer les entiers $1 < a < b < c$ tels que $(a-1)(b-1)(c-1)$ divise $abc - 1$.

Jeux

Exercice 31 Dans chacun des jeux suivants, deux joueurs jouent à tour de rôle. Celui qui prend le dernier jeton ou la dernière allumette gagne.

1. Un tas contient $n \geqslant 1$ jetons. À chaque tour, on retire un nombre impair de jetons, de son choix, sans dépasser le nombre de jetons restants. Déterminer le gagnant selon n.
2. Un tas contient 30 allumettes. À chaque tour, on en retire 1, 2 ou 3, sans dépasser le nombre d'allumettes restantes. Donner une stratégie gagnante au premier joueur. Que se passe-t-il si le tas contient initialement 32 allumettes ?
3. Deux tas contiennent respectivement $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$ jetons. À chaque tour, on retire autant de jetons que l'on souhaite, mais au moins un et dans un seul tas. Déterminer les positions perdantes, c'est-à-dire celles où le joueur qui commence ne peut pas gagner si son adversaire joue correctement.

Exercice 32 Un entier $n \geq 1$ est écrit au tableau. À tour de rôle, un joueur choisit un diviseur strict positif d de l'entier m affiché et remplace m par $m - d$. Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

Déterminer les valeurs initiales de n pour lesquelles le premier joueur possède une stratégie gagnante.

Exercice 33 On écrit au tableau un entier $n \geqslant 3$. Deux joueurs jouent à tour de rôle. Un coup consiste à remplacer l'entier m présent au tableau par un entier r tel que $3 \leqslant r < m$ et $\operatorname{pgcd}(r, m) = 1$.

Le joueur qui ne peut plus jouer perd. Caractériser complètement les positions perdantes.

Exercice 34 On fixe un entier $N > 1$ et on écrit au tableau tous ses diviseurs positifs. Deux joueurs jouent à tour de rôle. Un coup consiste à choisir un nombre $d > 1$ encore présent, puis à effacer tous les nombres présents qui sont multiples de d, y compris d. Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

Montrer que le premier joueur possède toujours une stratégie gagnante.

Indication : *Raisonner par l'absurde en supposant que le second joueur possède une stratégie gagnante.*

Exercice 35 On écrit au tableau deux entiers strictement positifs distincts a et b. Deux joueurs jouent à tour de rôle. À chaque coup, on choisit deux nombres présents et on ajoute leur différence positive, à condition qu'elle ne figure pas déjà au tableau. Les nombres précédemment écrits restent en place. Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

1. Montrer que toute partie se termine et déterminer les nombres présents au tableau à la fin.
2. En déduire le gagnant en fonction de a et b.

Exercice 36 ★ On fixe $k \geqslant 2$. Partant d'un entier $m \geqslant k$, un joueur doit le remplacer par un entier m' vérifiant $k \leqslant m' < m$ et $\operatorname{pgcd}(m, m') = 1$. Le premier joueur qui ne peut plus jouer perd. Montrer que l'issue du jeu à partir de n ne dépend que de l'ensemble des nombres premiers $p \leqslant k$ qui divisent n.